Varianta 11

Subiectul I

a) $a = -\frac{1}{3}$.

b) Partea reală este -3.

c) $5\sin^3 \pi = 0$.

d) $S = 16\sqrt{3}$.

e) $E = 7$.

f) $i^8 = 1$.

Subiectul II

1.

a) $S_{21} = \frac{3^{21} - 1}{2}$.

b) $P_5 = 5! = 120$.

c) $x \in \{1, 3\}$.

d) $x_1 \cdot x_2 = \frac{-5}{1} = -5$.

e) $\log_7 3 < \log_7 5$.

2.

a) $f'(x) = \frac{-3}{x^4}$.

b) $\lim\limits_{x \to \infty} 5x^3 \cdot f(x) = 5$.

c) $y = 0$ este asimptotă orizontală la $+\infty$.

d) $\int_1^2 f(x)dx = \frac{3}{8}$.

e) Din **a)** rezultă că $f'(x) < 0$, $\forall x \in (-\infty, 0)$, deci f este descrescătoare pe $(-\infty, 0)$.

Subiectul III

a) $C = B - A = \begin{pmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{pmatrix}$.

b) Prin calcul direct obținem $A^2 = I_2$.

c) $\det C = \begin{vmatrix} x-2 & 1 \\ 1 & x-2 \end{vmatrix} = (x-2)^2 - 1$.

d) $(A-I_2)(A+I_2)=A^2-I_2=O_2$.

e) $C^2=\begin{pmatrix}(x-2)^2+1 & 2(x-2)\\ 2(x-2) & (x-2)^2+1\end{pmatrix}$ şi $(2x-4)\cdot C-(\det C)I_2=C^2$.

f) Dacă $C^2=(2x-4)C$, din e) obținem $(\det C)I_2=O_2$.

Rezultă $\det C=0$, deci $(x-2)^2=1\Rightarrow x\in\{1,3\}$.

Reciproc: dacă $x=1$; $C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$, $C^2=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, deci $C^2=-2C=(2\cdot 1-4)\cdot C$

dacă $x=3$; $C=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $C^2=\begin{pmatrix}2 & 2\\ 2 & 2\end{pmatrix}$, deci $C^2=2C=(2\cdot 3-4)\cdot C$.

g) $A+A^2+A^3+\ldots+A^{2007}\overset{b)}{=}A+I_2+A+I_2+\ldots+A=1003\cdot(A+I_2)+A=$

$=1003\cdot\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2007 & 0\\ 1004 & -1\end{pmatrix}$.

Subiectul IV

a) $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-9}},\forall x\in(3,\infty)$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{\sqrt{x-3}}=\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ x>3}}\sqrt{x+3}=\sqrt{6}$.

c) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{f(x)-f(4)}{x-4}=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$.

d) Obținem $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2-9}}{x}=1$ şi $n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2-9}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-9}{\sqrt{x^2-9}+x}=0$.

Deci $y=x$ este asimptota oblică la $+\infty$.

e) Din **a)** obținem că $f'(x)>0,\forall x\in(3,\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe intervalul $(3,\infty)$.

f) $F'(x)=\dfrac{x^2-9}{\sqrt{x^2-9}}=\sqrt{x^2-9}=f(x),\forall x\in(3,\infty)$

Deci F este derivabilă pe $(3,\infty)$ şi $F'(x)=f(x)$, $\forall x\in(3,\infty)\Rightarrow F$ este o primitivă pentru funcția f.

g) $S_f=\int_4^5 f(x)dx=F(5)-F(4)=\dfrac{1}{2}(20-9\ln 9)-\dfrac{1}{2}\left(4\sqrt{7}-9\ln\left(4+\sqrt{7}\right)\right)$.